

Таблица интегралов

(a, b, m, n - постоянные)

I. Интегралы от рациональных функций

1. $\int (ax + b)^n dx = \frac{(ax + b)^{n+1}}{a(n+1)} + C$, n - целое число, не равное -1 .
2. $\int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \ln|ax + b| + C = \frac{1}{a} \ln C|ax + b|$.
3. $\int \frac{x dx}{ax + b} = \frac{1}{a^2} [ax - b \ln(ax + b)] + C$.
4. $\int \frac{x^2 dx}{ax + b} = \frac{x^2}{2a} - \frac{bx}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} \ln(ax + b) + C$.
5. $\int \frac{dx}{x(ax + b)} = -\frac{1}{b} \ln \left| \frac{ax + b}{x} \right| + C$.
6. $\int \frac{dx}{x^2(ax + b)} = -\frac{1}{bx} + \frac{a}{b^2} \ln \left| \frac{ax + b}{x} \right| + C$.
7. $\int \frac{x dx}{(ax + b)^2} = \frac{1}{a^2} \left(\ln|ax + b| + \frac{b}{ax + b} \right) + C$.
8. $\int \frac{x^2 dx}{(ax + b)^2} = \frac{1}{a^3} \left[ax - 2b \ln|ax + b| - \frac{b^2}{ax + b} \right] + C$.
9. $\int \frac{dx}{x(ax + b)^2} = \frac{1}{b(ax + b)} - \frac{1}{b^2} \ln \left| \frac{ax + b}{x} \right| + C$.
10. $\int \frac{dx}{a^2 x^2 + b^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \frac{a}{b} x + C$.
11. $\int \frac{dx}{a^2 x^2 - b^2} = \frac{1}{2ab} \ln \left| \frac{ax - b}{ax + b} \right| + C$.
12. $\int \frac{x dx}{a^2 x^2 \pm b^2} = \frac{1}{2a^2} \ln|a^2 x^2 \pm b^2| + C$.
13. $\int \frac{x^2 dx}{a^2 x^2 + b^2} = \frac{1}{a^2} x - \frac{b}{a^3} \operatorname{arctg} \frac{a}{b} x + C$.
14. $\int \frac{x^2 dx}{a^2 x^2 - b^2} = \frac{1}{a^2} x + \frac{b}{2a^3} \ln \left| \frac{ax - b}{ax + b} \right| + C$.
15. $\int \frac{dx}{x(a^2 x^2 + b^2)} = \frac{1}{2b^2} \ln \frac{x^2}{a^2 x^2 + b^2} + C$.
16. $\int \frac{dx}{x(a^2 x^2 - b^2)} = \frac{1}{2b^2} \ln \left| \frac{a^2 x^2 - b^2}{x^2} \right| + C$.

$$17. \int \frac{dx}{x^2(a^2x^2 + b^2)} = -\frac{1}{b^2x} - \frac{a}{b^3} \operatorname{arctg} \frac{a}{b}x + C.$$

$$18. \int \frac{dx}{x^2(a^2x^2 - b^2)} = \frac{1}{b^2x} + \frac{a}{2b^3} \ln \left| \frac{ax - b}{ax + b} \right| + C.$$

II. Интегралы от иррациональных функций

19. $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C, \quad n \neq -1.$
20. $\int x\sqrt{ax+b} dx = \frac{2}{15a^2} (3ax-2b)\sqrt{(ax+b)^3} + C.$
21. $\int x^2\sqrt{ax+b} dx = \frac{2}{105a^3} (15a^2x^2 - 12abx + 8b^2)\sqrt{(ax+b)^3} + C.$
22. $\int \frac{x}{\sqrt{ax+b}} dx = \frac{2(ax-2b)}{3a^2}\sqrt{ax+b} + C.$
23. $\int \frac{x^2}{\sqrt{ax+b}} dx = \frac{2}{15a^3} (3a^2x^2 - 4abx + 8b^2)\sqrt{ax+b} + C.$
24.
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} \begin{cases} = \frac{1}{\sqrt{b}} \ln \frac{\sqrt{ax+b} - \sqrt{b}}{\sqrt{ax+b} + \sqrt{b}} + C, & b > 0, \\ = \frac{2}{\sqrt{-b}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{ax+b}{-b}} + C, & b < 0. \end{cases}$$
25. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{bx} - \frac{a}{2b} \int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}.$
26. $\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x} dx = 2\sqrt{ax+b} + b \int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}.$
27. $\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{ax+b}}{x} + \frac{a}{2} \int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}.$

В формулах 28 - 47 считается, что $a > 0, b > 0.$

28. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2x^2 \pm b^2}} = \frac{1}{a} \ln \left| ax + \sqrt{a^2x^2 \pm b^2} \right| + C.$
29. $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2 - a^2x^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsin} \frac{ax}{b} + C.$
30. $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2x^2 \pm b^2}} = \frac{1}{a^2} \sqrt{a^2x^2 \pm b^2} + C.$
31. $\int \frac{xdx}{\sqrt{b^2 - a^2x^2}} = -\frac{1}{a^2} \sqrt{b^2 - a^2x^2} + C.$
32. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2x^2 \pm b^2}} = \frac{1}{2a^3} \left[ax\sqrt{a^2x^2 \pm b^2} \mp b^2 \ln \left| ax + \sqrt{a^2x^2 \pm b^2} \right| \right] + C.$
33. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{b^2 - a^2x^2}} = \frac{1}{2a^3} \left[-ax\sqrt{b^2 - a^2x^2} + b^2 \operatorname{arcsin} \frac{ax}{b} \right] + C.$
34. $\int \sqrt{a^2x^2 \pm b^2} dx = \frac{1}{2} \left[x\sqrt{a^2x^2 \pm b^2} \pm \frac{b^2}{a} \ln \left| ax + \sqrt{a^2x^2 \pm b^2} \right| \right] + C.$

$$35. \int \sqrt{b^2 - a^2 x^2} dx = \frac{1}{2} \left[x \sqrt{b^2 - a^2 x^2} + \frac{b^2}{a} \arcsin \frac{ax}{b} \right] + C.$$

$$36. \int x \sqrt{a^2 x^2 \pm b^2} dx = \frac{1}{3a^2} \sqrt{(a^2 x^2 \pm b^2)^3} + C.$$

$$37. \int x \sqrt{b^2 - a^2 x^2} dx = -\frac{1}{3a^2} \sqrt{(b^2 - a^2 x^2)^3} + C.$$

$$38. \int x^2 \sqrt{a^2 x^2 \pm b^2} dx = \frac{1}{8a^3} \left[ax(2a^2 x^2 \pm b^2) \sqrt{a^2 x^2 \pm b^2} - b^4 \ln \left| ax + \sqrt{a^2 x^2 \pm b^2} \right| \right] + C.$$

$$39. \int x^2 \sqrt{b^2 - a^2 x^2} dx = \frac{1}{8a^3} \left[ax(2a^2 x^2 - b^2) \sqrt{b^2 - a^2 x^2} + b^4 \arcsin \frac{ax}{b} \right] + C.$$

$$40. \int \frac{\sqrt{a^2 x^2 + b^2}}{x} dx = \sqrt{a^2 x^2 + b^2} + \frac{b}{2} \ln \frac{\sqrt{a^2 x^2 + b^2} - b}{\sqrt{a^2 x^2 + b^2} + b} + C$$

Примечание¹⁾ Правой части можно придать вид на основании тождества

$$\frac{\sqrt{a^2 x^2 + b^2} - b}{\sqrt{a^2 x^2 + b^2} + b} = \left(\frac{ax}{\sqrt{a^2 x^2 + b^2} + b} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{a^2 x^2 + b^2} - b}{ax} \right)^2.$$

$$40'. \int \frac{\sqrt{a^2 x^2 - b^2}}{x} dx = \sqrt{a^2 x^2 - b^2} + b \arcsin \left| \frac{b}{ax} \right| + C.$$

$$41. \int \frac{\sqrt{b^2 - a^2 x^2}}{x} dx = \sqrt{b^2 - a^2 x^2} - b \ln \left| \frac{b - \sqrt{b^2 - a^2 x^2}}{x} \right| + C.$$

$$42. \int \frac{\sqrt{a^2 x^2 \pm b^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{a^2 x^2 \pm b^2}}{x} + a \ln \left| ax + \sqrt{a^2 x^2 \pm b^2} \right| + C.$$

$$43. \int \frac{\sqrt{b^2 - a^2 x^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{b^2 - a^2 x^2}}{x} - a \arcsin \frac{ax}{b} + C.$$

$$44. \int \frac{dx}{x \sqrt{a^2 x^2 + b^2}} = \frac{1}{b} \ln \left| \frac{x}{b + \sqrt{a^2 x^2 + b^2}} \right| + C.$$

$$44'. \int \frac{dx}{x \sqrt{a^2 x^2 - b^2}} = -\frac{1}{b} \arcsin \left| \frac{b}{ax} \right| + C.$$

$$45. \int \frac{dx}{x \sqrt{b^2 - a^2 x^2}} = \frac{1}{b} \ln \left| \frac{x}{b + \sqrt{b^2 - a^2 x^2}} \right| + C.$$

$$46. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{a^2 x^2 \pm b^2}} = \mp \frac{\sqrt{a^2 x^2 \pm b^2}}{b^2 x} + C.$$

$$47. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{b^2 - a^2 x^2}} = -\frac{\sqrt{b^2 - a^2 x^2}}{b^2 x} + C.$$

$$48. \int \sqrt{\frac{a+x}{b+x}} dx = \sqrt{(a+x)(b+x)} + (a-b) \ln(\sqrt{a+x} + \sqrt{b+x}) + C.$$

$$49. \int \sqrt{\frac{a-x}{b+x}} dx = \sqrt{(a-x)(b+x)} + (a+b) \arcsin \sqrt{\frac{x+b}{a+b}} + C.$$

$$50. \int \sqrt{\frac{a+x}{b-x}} dx = -\sqrt{(a+b)(b-x)} - (a+b) \arcsin \sqrt{\frac{b-x}{a+b}} + C.$$

$$51. \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx = -\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C.$$

$$52. \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}} = \ln \left| \frac{\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b}}{\sqrt{x-a} - \sqrt{x-b}} \right| + C.$$

$$53. \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2 \arcsin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C.$$

$$54. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$$

где m, n, r, s - целые числа, $s > 1$. Применяется подстановка $ax^m + b = u^s$, если $\frac{m+1}{n}$ - число целое, и подстановка $a + bx^{-n} = u^s$, если $\frac{m+1}{n} + \frac{r}{s}$ - число целое. В других случаях интеграл не выражается элементарной функцией.

III. Интегралы от трансцендентных функций

$$55. \int x^n e^x dx = e^x [x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} - \dots + (-1)^n n!] + C, \quad n - \text{целое положительное число.}$$

$$56. \int (\ln x)^n dx = x [(\ln x)^n - n(\ln x)^{n-1} + n(n-1)(\ln x)^{n-2} - \dots + (-1)^n n!] + C, \quad n - \text{целое положительное число.}$$

$$57. \int e^{ax} \sin nx dx = \frac{e^{ax} (a \sin nx - n \cos nx)}{a^2 + n^2} + C.$$

$$58. \int \frac{(\ln x)^n}{x} dx = \frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1.$$

$$59. \int \frac{dx}{x \ln x} = \ln |\ln x| + C.$$

$$60. \int \sin nx dx = -\frac{\cos nx}{n} + C.$$

$$61. \int \cos nx dx = \frac{\sin nx}{n} + C.$$

$$62. \int \sin mx \cos nx dx = -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C, \quad m \neq n.$$

$$63. \int \sin mx \sin nx dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + C, \quad m \neq n.$$

$$64. \int \cos mx \cos nx dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + C, \quad m \neq n.$$

$$65. \int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + C = -\frac{1}{2} \cos^2 x + C.$$

$$66. \int \sin^2 x dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

$$67. \int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

$$68. \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

$$69. \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + C.$$

$$70. \int \sin^m x \cos^n x dx \begin{cases} = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \sin^{m-2} x \cos^n x dx, & m \neq -n, \\ = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cos^{n-2} x dx, & m \neq -n. \end{cases}$$

$$71. \int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x} \begin{cases} = -\frac{1}{m-1} \frac{1}{\sin^{m-1} x \cos^{n-1} x} + \frac{m+n-2}{m-1} \int \frac{dx}{\sin^{m-2} x \cos^n x}, & m \neq 1, \\ = \frac{1}{n-1} \frac{1}{\sin^{m-1} x \cos^{n-1} x} + \frac{m+n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^m x \cos^{n-2} x}, & n \neq 1. \end{cases}$$

$$72. \int \operatorname{tg}^n x dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x dx, \quad n \neq 1.$$

$$73. \int \operatorname{ctg}^n x dx = -\frac{\operatorname{ctg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{ctg}^{n-2} x dx, \quad n \neq 1.$$

$$74. \int x^n \sin x dx = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x dx.$$

$$75. \int x^n \cos x dx = x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x dx.$$

$$76. \int \frac{dx}{a+b \cos x} \begin{cases} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C, & a^2 > b^2, \\ = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{b^2-a^2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + a+b}{\sqrt{b^2-a^2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} - a-b} \right| + C, & a^2 < b^2. \end{cases}$$

$$77. \int \frac{dx}{a+b \sin x} \begin{cases} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arctg} \frac{a \operatorname{tg} \frac{x}{2} + b}{\sqrt{a^2-b^2}} + C, & a^2 > b^2, \\ = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln \left| \frac{a \operatorname{tg} \frac{x}{2} + b - \sqrt{b^2-a^2}}{a \operatorname{tg} \frac{x}{2} + b + \sqrt{b^2-a^2}} \right| + C, & a^2 < b^2. \end{cases}$$

$$78. \int \frac{dx}{a \cos x + b \sin x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \ln \left| \frac{a \operatorname{tg} \frac{x}{2} - b + \sqrt{a^2+b^2}}{a \operatorname{tg} \frac{x}{2} - b - \sqrt{a^2+b^2}} \right|.$$

В частности,
$$\int \frac{dx}{\cos x + \sin x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \right|$$

79.
$$\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \left(\frac{a \operatorname{tg} x}{b} \right) + C.$$

80.
$$\int e^{ax} \sin nx dx = \frac{e^{ax}(a \sin nx - n \cos nx)}{a^2 + n^2} + C.$$

81.
$$\int e^{ax} \cos nx dx = \frac{e^{ax}(n \sin nx + a \cos nx)}{a^2 + n^2} + C.$$

82.
$$\int e^{ax} \sin^n x dx = \frac{e^{ax} \sin^{n-1} x (a \sin x - n \cos x)}{a^2 + n^2} + \frac{n(n-1)}{a^2 + n^2} \int e^{ax} \sin^{n-2} x dx.$$

83.
$$\int e^{ax} \cos^n x dx = \frac{e^{ax} \cos^{n-1} x (a \cos x + n \sin x)}{a^2 + n^2} + \frac{n(n-1)}{a^2 + n^2} \int e^{ax} \cos^{n-2} x dx.$$

84.
$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

85.
$$\int \arccos x dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C.$$

86.
$$\int \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

87.
$$\int x \arcsin x dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} \right) \arcsin x + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4}.$$

88.
$$\int x \arccos x dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} \right) \arccos x - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4}.$$

89.
$$\int x \operatorname{arctg} x dx = \frac{1}{2} (x^2 + 1) \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2}.$$

90.
$$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$$

91.
$$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$$

92.
$$\int \operatorname{th} x dx = \ln \operatorname{ch} x + C.$$

93.
$$\int \operatorname{sh}^2 x dx = -\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x + C.$$

94.
$$\int \operatorname{ch}^2 x dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \operatorname{ch} 2x + C.$$